Composantes connexes d'une forme quadratique

Référence : Oraux X-ENS algèbre 3.

Théorème :
Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie $n \geq 1$. On note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E et $\Omega(E)$ le sous-ensemble des formes quadratiques non-dégénérées. Alors, les composantes connexes $\Omega(E)$ sont les $\Omega_k(E) = \{q \in \Omega(E), sign(q) = (k, n-k)\}$

Preuve :

Soit $(r,s) = sign(q)$, q$\in \Omega(E)$. Comme q est non-dégénérée alors $r+s=n$. En se plaçant dans une base q-orthogonale, on voit qu'il existe deux sous-espaces supplémentaires F et G de dimension resp. r et s.
Sur F, q est définie positive et sur G q est définie négative. Comme $q|_F$ est définie positive, la fonction $q \mapsto \sqrt{q}$ est une norme sur F. Comme nous sommes en dimension finie, alors la norme $\sqrt{q}$ est équivalente à la restriction de la norme de E à F.
Donc, il existe $k_1 > 0, \forall x \in F, \sqrt{q(x)} \geq k_1\|x\|$ d'où $q(x) \geq k_1^2\|x\|^2$. De même pour (-q) sur G, il existe $k_2 > 0, \forall x \in, \sqrt{-q(x)} \geq k_2\|x\|$ d'où $q(x) \leq k_2^2\|x\|^2$.
On pose $k = \min(k_1, k_2)$.

Pour $q' \in Q(E)$, posons $N(q') = \sup\limits_{\|x\|=1} |q'(x)|$, il s'agit d'une norme sur $Q(E)$.
On a pour tout $x \in E, |q'(x)| \leq N(q')\|x\|_E^2$.

Soit $q' \in Q(E)$ telle que $N(q'-q) < k$ on a donc :

$$|q'(x) - q(x)| < k\|x\|_E^2 \text{ pour tout } x \in E - \{0\}$$

Pour $x \in F - \{0\}, q'(x) \geq q(x) - k\|x\|^2 \geq 0$
Pour $x \in G - \{0\}, q'(x) \leq q(x) + k\|x\|^2 \leq 0$

Ainsi, q' est définie positive sur F et définie négative sur G.

Pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \Omega_k(E) = \{q \in \Omega(E), sign(q) = (k, n-k)\}$. Les $\Omega_k(E)$ forment une partition de $Q(E)$, on va montrer qu'ils sont tous connexes.
Soit A et B dans $S_n(\mathbb{R})$ de signature $(k, n-k)$. Il existe P et Q dans $O_n(\mathbb{R})$ (thm spectral) telles que :

$$A = P^T D_k P \text{ et } B = Q^T D_k Q$$

où $D_k = diag(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$. On peut supposer que le déterminant est >0. Or, l'ensemble des matrices réelles inversibles de det>0 est connexe par arcs. Alors : $t \mapsto P(t)^T D_k P(t)$ est une chemin continu formé de matrices de signature $(k, n-k)$ qui joint A à B.
□.

Recasage : 204,171